Test Telematico di Matematica (A)

Scienze Agrarie 11/05/2020

1) Calcolare, se esistono, le equazioni degli asintoti verticali della funzione
$$f(x) = \frac{x}{\log(x^2)} \, .$$

2) È data la funzione
$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} \, .$$
Calcolare la derivata prima e determinare le soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$.

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x) = \log \frac{x-1}{x-3} \, .$$

4) Calcolare
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6} \, dx \, .$$

Soluzione

1) La funzione non risulta definita per $x = -1, 0, 1$, ed essendo

$$\lim_{x\to -1^\pm} \frac{x}{\log(x^2)} = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\log(x^2)} = 0\,, \qquad \lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \pm\infty\,,$$

le rette di equazione $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali per la funzione data.

2) Si ha

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

che risulta nulla per $x = 2$.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $\frac{x-1}{x-3} > 0$. Si ha quindi

$$D = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)\,.$$

4) Risulta

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)\,dx\\ &= [\log(x+2)]_0^1 - [\log(x+3)]_0^1\\ &= -\log(4) + 2\log(3) - \log(2)\\ &= \log\frac{9}{8}\end{aligned}$$